Mathematik und Schach und Schönheit

Auszüge aus dem gleichnamigen Eröffnungsvortrag bei der Schacholympiade, Dresden 2008

| Christian Hesse | <<<Vorspann>>>

Mathematik und Schach gehören zum Weltkulturerbe. Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Ihre Ursprünge verlieren sich im Dunkel der Geschichte. Schon in grauer Vorzeit haben sich Menschen damit beschäftigt, Kalender zu erstellen, Land zu vermessen und Handel zu treiben. Aktivitäten also, die den Einsatz mathematischer Methoden erfordern. Die Gegenwart ist ohne Mathematik sogar überhaupt nicht mehr vorstellbar. Mathematik steckt unbemerkt in fast allen technischen Errungenschaften vom MP3-Spieler über die Computer-Tomographie bis hin zum elektronischen Geld und GPS. Sie ist die Schlüsselkompetenz für Schlüsseltechnologien, meist die treibende Kraft in der Entwicklung und Weiterentwicklung. Darüber hinaus ist sie ein ungeheuer mächtiges Denkinstrument, das uns Menschen erlaubt, in Gefilde weit jenseits unseres Erfahrungshorizonts vorzustoßen, in die Welt der Elementarteilchen etwa oder in die Tiefen des Weltalls. Als wunderbar effektives Erkenntnisorgan ermöglicht sie es uns das Universum, in dem wir leben, besser zu verstehen, ja, sie ist für unser Überleben in diesem Universum essentiell.

Der homo ludens

Schach ist eines der ältesten Brettspiele. Seine Urform Tschaturanga ist bereits 200 v. Chr. im Nordwesten Indiens nachweisbar. Seither hat das Spiel einen weltumspannenden Einzug in alle Kulturen aller Länder gehalten. Nach aktuellen Schätzungen spielen etwa 200 Millionen Menschen auf der Welt aktiv Schach. Eine stattliche Anhängerschaft für eine von Menschen erdachte und im Kern rein zerebrale Aktivität.

> »Nach aktuellen Schätzungen spielen etwa 200 Millionen Menschen auf der Welt aktiv Schach.«

Das liegt zum einen daran, dass Spiele generell Konjunktur haben. In der Kulturphilosophie gesellte sich vor einem halben Jahrhundert zum Denker homo sapiens und zum Macher homo faber der Mensch als Spieler: homo ludens. Der Aspekt des Spielerischen kann als eine Grundkategorie des Menschlichen aufgefasst werden. Und viele unserer großen gesellschaftlichen Teilsysteme wie Wissenschaft, Wirtschaft, Theater und Kunst sind spielerischen Verhaltensformen entsprungen.

Zum anderen nimmt das Schachspiel unter den Spielen eine herausgehobene Sonderrolle ein. Man kann es als in sich abgeschlossenes Modell des Lebens und der Welt deuten. Trotz der Begrenzung des Terrains auf nur 64 Felder und der Aktionsweisen auf nur wenige klare und übersichtliche Zugweisen ist es in einer ans unerschöpfliche grenzenden Weise reichhaltig und so vielschichtig, dass es in symbolischer Form Grundaspekte der menschlichen Existenz widerzuspiegeln vermag. Schach ist eine geistige Kampfsportart und gleichzeitig ein Resonanzboden für Ästhetik, Leidenschaft und intellektuelles Heldentum, ein ganzes Königreich voller Ideen, Emotionen, Imaginationen, von einmaligen Einblicken, links- und rechtshemisphärischer Denkaktivität, von gebündelter Kreativität und wunderbarer Harmonie zwischen logischen und paradoxen Elementen.

Schach, das ist nicht nur Sport, Spiel, Spannung. Wer Schach lernt, der lernt auch etwas fürs Leben. Schach fördert die Gedächtnisentwicklung und die Konzentrationsfähigkeit. Es entwickelt das logische Denken, die planerische Phantasie und die schöpferische Kreativität. Es trainiert Entschlusskraft, Geduld, Zielstrebigkeit und Ausdauer. Es schafft Selbstmotivation, lehrt geistige Unabhängigkeit, hilft soziale Schranken zu überwinden und zeigt, dass Arbeit durch Erfolg belohnt wird.

AUTOR

Christian Hesse ist Professor für Mathematik an der Universität Stuttgart mit Schwerpunkt Stochastik. Er wurde zusammen mit den Klitschko-Brüdern, mit Fußballtrainer Felix Magath, dem Film-Produzenten Artur Brauner, der Schauspielerin und Sängerin Vaile und dem Ex-Weltmeister Anatoli Karpov zum internationalen Botschafter der Schacholympiade Dresden 2008 ernannt.

Schach und Mathematik besitzen eine ganze Reihe struktureller Ähnlichkeiten. Schach ist ebenso abstrakt wie Mathematik. Nur zur vereinfachten Darstellung spielt man es mit Figuren auf einem Brett. Doch letztlich muss man sich nur 64 aufeinander bezogene Raumpunkte und die Wirkung von Kraftfeldern auf diesen Raumpunkten vorstellen, denn die Figuren sind nur Verkörperungen von Kräften und diese benötigen kein physisch ausgedehntes Standfeld.

Schach unterliegt Regeln. Diese sind willkürlich und von Menschen geschaffen, ebenso wie die Axiome in der Mathematik. Sie legen fest was es bedeutet, Schach zu spielen oder Mathematik zu treiben.

Beim Schach sind Figurenmuster – ihre Erkennung, Analyse und Bewertung von entscheidender Bedeutung. Die Mathematik andererseits ist nach einer möglichen Definition die Wissenschaft von den Mustern. Eines der ältesten Teilgebiete, die Geometrie, studiert Muster von Punktmengen in Ebene und Raum, die nicht anspruchslose intellektuelle Provinz der Zahlentheorie jongliert mit Mustern in den ganzen Zahlen, die moderne Disziplin der Stochastik untersucht Muster in Zufallsvorgängen.

Intellektuelle Schönheit

Und nicht zuletzt und hier vor allem: Mathematik und Schach sind beides Quellen stark empfundener Schönheit. Das Empfinden von etwas Schönem ist fundamental mit dem Gefühl des Wohlgefallens verbunden. Als Grundvoraussetzung für ein ästhetisches Erlebnis benötigt man mithin etwas, das die Sinne, das Herz oder den Verstand in positiver Weise berührt: Ein formvollendetes Bauwerk, eine betörende Symphonie, einen farbenprächtigen Sonnenuntergang, ein sympathisches Gesicht, eine ausgefeilte Gedankenkonstruktion.

Es ist vergleichsweise leicht, Schönheit über die Sinne zu erfahren. Um intellektuelle Schönheit zu spüren, bedarf es dagegen als Grundvoraussetzung einer Schulung des Geistes. Das betrifft Schach und Mathematik gleichermaßen. Doch die intellektuell empfundene Schönheit ist nicht weniger intensiv als die sinnlich empfundene. Und um an diese letzte Aussage sogleich anzuknüpfen: Ein wichtiger Grund, sich mit Mathematik und Schach zu befassen, liegt in der dabei erlebbaren Schönheit.

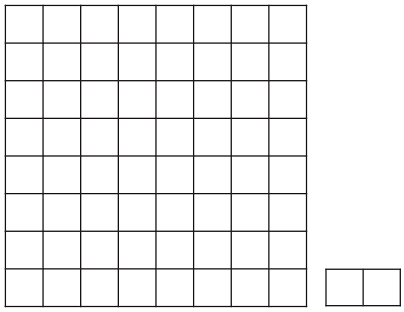
»Um intellektuelle Schönheit zu spüren, bedarf es einer Schulung des Geistes.«

Was die Ästhetik der Mathematik betrifft: Die nahtlose Passform, mit der ein Ensemble von Einzelüberlegungen und kleinen Gedankensplittern sich zu einer stringenten Argumentationslinie formiert, wie sie ähnlich der Rädchen eines Uhrwerks ineinander greifen und das größere Ganze eines geglückten mathematischen Beweises liefern, hat etwas ungemein Elegantes, Harmonisches und schlichtweg Schönes. Die gelungensten Ausprägungen dieses Genres lösen bisweilen wahre Feuerwerke auf der Großhirnrinde aus. Die Ästhetik steckt in der Mathematik in der Ausstrahlung geistreich verknüpfter Ideen. Mathematik ist „Ideologie“, die Lehre von den Ideen. Simon Singh nennt sie „the sexiest discipline on the planet“. Und die Mathematiker sind die Ingenieure in dieser wunderbaren Welt der Ideen.

»Mathematik ist ›Ideologie‹, die Lehre von den Ideen.«

Wir betrachten einmal folgendes Beispiel, das auf eindrucksvolle Weise die Wirksamkeit und Schönheit auch einfacher mathematischer Ideen demonstriert.

Wir stellen uns ein 8×8-Quadrat vor, etwa einen Platz, und fragen, ob es möglich ist, diese Fläche mit 2×1 Kacheln zu pflastern.

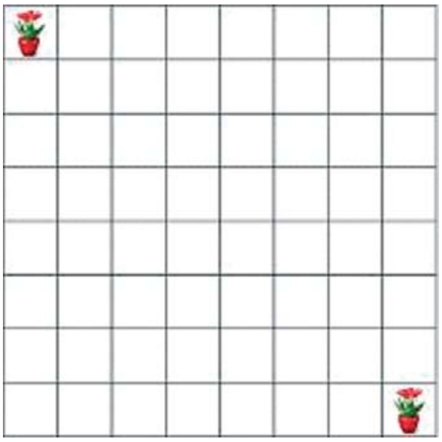


8x8 Fläche 2x1 Kacheln

Dieses sehr anspruchsvolle Problem wurde 1961 unabhängig voneinander von Fisher & Temperley und von Kasteleyn gelöst. Sie konnten ermitteln, dass allgemein die Anzahl verschiedener Pflasterungen eines $2m \times 2n$-Rechtecks mit $2mn$ Kacheln der Größe 2×1 durch eine recht komplizierte Formel gegeben ist: 4^{mn} mal ein Produkt von Summen von zwei Quadraten von bestimmten Kosinus-Werten.

Eine unglaubliche und mysteriöse Formel ist es. Die multiplizierten Terme sind nämlich keine ganzen Zahlen, mehrheitlich noch nicht einmal rationale Zahlen. Doch wenn sie multipliziert werden, ergeben sie auf wundersame Weise die ganze Zahl der verschiedenen möglichen Pflasterungen unserer Fläche. Für den uns interessierenden Spezialfall $n = m = 4$ erhält man den Wert 12 988 816.

So weit so gut. Wir behandeln nun ein leicht modifiziertes Problem. Wir platzieren Blumenkübel auf zwei diagonal gegenüberliegenden Eckfeldern des Platzes und stellen abermals unsere Frage nach der Anzahl verschiedener Pflasterungen der verbleibenden 62 Felder mit 2×1 Kacheln.

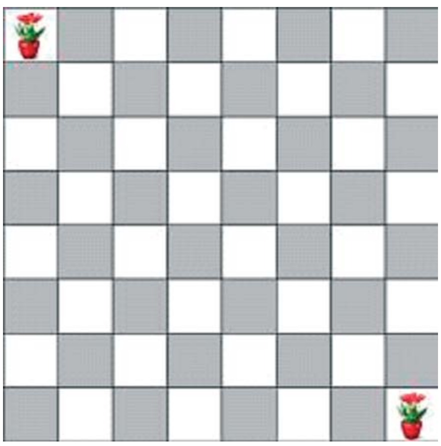


Für dieses vermeintlich noch weitaus schwierigere Problem gibt es überraschenderweise eine ausgesprochen einfache und geistreiche Lösung.

Angenommen, es gibt eine Pflasterung. Die Anzahl vertikal liegender Kacheln, von der obersten, der ersten, Reihe in die zweite Reihe ist eine ungerade Zahl. Ebenso die Anzahl der Kacheln, die vertikal von der zweiten in die dritte Reihe verlaufen, usw. Also ist die Gesamtzahl vertikaler Kacheln die Summe von 7 ungeraden Zahlen, mithin ebenfalls eine ungerade Zahl. Mit demselben Argument ergibt sich auch die Anzahl der horizontal liegenden Kacheln als ungerade. Die Gesamtzahl aller Kacheln ist als Summe dieser beiden ungeraden Zahlen eine gerade Zahl. Aber eine erfolgreiche Überdeckung müsste zwingend genau 62/2 = 31, also eine ungerade Zahl von Kacheln verwenden. Das ist ein Widerspruch. Somit kann man folgern, dass die hypothetisch als möglich angenommene Pflasterung nicht existieren kann.

Einfach und schön. Doch es geht noch einfacher und noch schöner. Und geradewegs brillant.

Wir färben unser 8×8 Quadrat mit einem Schachbrettmuster ein.



Dann sind die beiden blumengeschmückten Eckfelder gleichfarbig (weiß). Außerdem registrieren wir, dass eine Kachel, ganz gleich wie und wo wir sie platzieren, stets ein weißes und ein schwarzes Feld überdeckt. Also würden die für eine Pflasterung benötigten 31 Kacheln exakt 31 weiße und 31 schwarze Felder überdecken (ungerade Zahlen). Unser zu überdeckendes Gebiet besteht aber aus 30 weißen und 32 schwarzen Feldern (gerade Zahlen). Also kann es keine Pflasterung geben. Das Gerade/Ungerade-Thema tritt hier in Kooperation mit einem elementaren Färbungsargument als Denkwerkzeug auf, das die Situation sofort klärt.

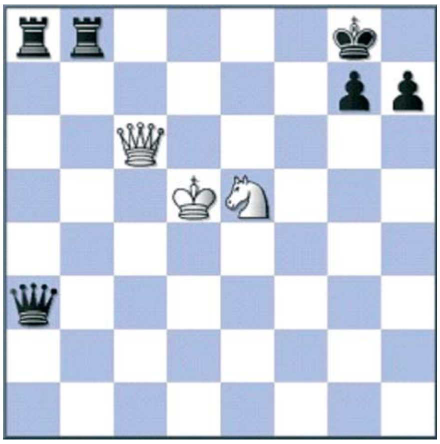
»Die Ästhetik liegt im Schach in der Bewegung der Figurenensembles.«

Wie verhält es sich nun mit dem Schönheitssinn im Schach? Schach ist zwar ein Spiel, doch es ist ein Spiel, das den Bereich des nur Spielerischen weit transzendiert. Eine willkürlich aus dem Nichts geschöpfte Aktivität, eine nicht dinggebundene freischwebende Gedankenkonstruktion, die seit anderthalb Jahrtausenden nicht nur nicht untergegangen ist, sondern sich beständig wachsender Beliebtheit erfreut, hätte diese Popularität nicht erreichen können, wenn sie nicht tiefliegende Schichten von Geist und Seele zum Schwingen bringen würde.

Der Schönheitssinn kann auf ganz vielfältige Weise angesprochen werden. Man kann sich begeistern für fulminante Opfer als Sinnbild der Umwandlung von Materie in Energie. Man kann sich erfreuen an der Tiefe versteckter Rettungen aus hoffnungslosen Lagen. Man kann fasziniert sein von gegen alle Intuition erfolgreichen paradoxen Manövern. Man kann entzückt sein von wunderbar flüssigen, dabei schrittweise spannungssteigernden Bewegungsabläufen, bei denen mit feinmechanischer Genauigkeit ein Zahnrad in das nächste greift wie bei einem geglückten mathematischen Beweis. Die Ästhetik liegt im Schach in der Bewegung der Figurenensembles. Der Kunstgenuss hängt an ausgeklügelten Choreographien harmonischer und effektiver Figurendynamik, daran, wie sich angreifende und verteidigende Figuren zueinander platzieren oder bewegen, in welche Räume sie vordringen, welche Linien sie überqueren, welche Felder blockiert, besetzt, geräumt oder verstellt werden, sowie an den Ideenmustern, die daran geknüpft sind.

Was die Schönheit im Schach betrifft, so kenne ich kein eindrucksvolleres elementares Beispiel, um diese vor Augen zu führen als das mehr als ein halbes Millennium alte Erstickte Matt. Es ist für viele Schachspieler eine Art Urerlebnis aus ihrer ganz persönlichen, frühen Schachbiographie und weckt stets aufs neue Erinnerungen an die erste Begegnung mit dieser Kombination. Hat man dieses Mattschema auch nur ein einziges mal erlebt, so vergisst man es nicht mehr. Es gehört wohl zu den bei Schachspielern universell eingeprägten Mustern, zu den Archetypen im Sinne der Jung`schen Psychologie, die jeder unabhängig von seiner Spielstärke tief in seinem Unterbewusstsein aufbewahrt.

Lucena, 1497



Weiß zieht und gewinnt!

Die Lösung lautet: *1. De6+ Kh8 2. Sf7+ Kg8 3. Sh6+ Kh8 4. Dg8+ Txg8 5. Sf7 matt.* Dame bietet Schach, König begibt sich in die sichere Ecke. Springer bietet Schach, König weicht aus. Springer springt beiseite und löst Doppelschach aus. König schreitet abermals sorglos in die Ecke. Dame stürzt sich fulminant vom Springer gedeckt neben den König und bietet Schach. Turm schlägt Dame, Springer schnellt federnd zurück. Und mit diesem letzten Pferdesprung wird die Formation eines Mattmusters mit starker ästhetischer Ausstrahlung komplettiert.

Mathematik und Schach, die Königin der Wissenschaft und das Königliche Spiel, sind gerade auch aufgrund der ihnen inhärenten Schönheit faszinierend wie eh und je und noch lange nicht ausgespielt bzw. noch lange nicht zu Ende gedacht.